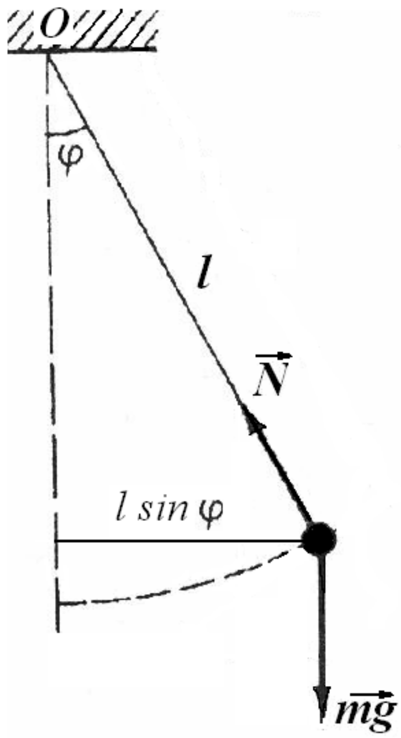
Лабораторная работа № **4. 6**

Изучение свободных колебаний математического маятника

***Принадлежности*:** 1) математический маятник; 2) секундомер.
Цель работы: изучить колебания математического маятника, определить ускорение свободного падения с помощью маятника.

Теоретические сведения.



Математический маятник представляет собой идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена материальная точка. Под действием силы тяжести маятник совершает колебания в вертикальной плоскости.

Хорошим приближением может служить небольшой тяжелый шар, подвешенный на длинной тонкой нити.

Будем характеризовать отклонение маятника от положения равновесия углом φ, который образует нить с вертикалью.

Согласно уравнению динамики вращательного движения суммарный момент внешних сил, действующих на тело, равен произведению момента инерции тела на угловое ускорение

$$\Sigma M^{внеш} = I\,\varepsilon.$$

На маятник действуют две силы – сила тяжести ***mg*** и сила натяжения нити ***N***. При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращающий момент, который создается только силой тяжести. Момент силы натяжения относительно точки *O* равен нулю, т.к. сила проходит через точку подвеса *O*.

Вращающий момент *M* (момент силы тяжести) равен по модулю произведению силы *mg* на плечо $l \sin\varphi$ (см. рис)

$$M = -\,mg\,l\sin\varphi.$$

Минус поставлен в связи с тем, что момент силы и угловое отклонение φ имеют противоположные знаки. Угол φ отсчитывается против часовой стрелки, а сила вращает по часовой стрелке.

Подставим момент инерции материальной точки $I = ml^2$ и угловое ускорение как вторую производную от угла по времени $\varepsilon = \ddot{\varphi}$

$$ml^2\,\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi. \qquad (1)$$

Воспользуемся разложением синуса в ряд Тейлора

$$sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots \qquad (2)$$

(точками обозначены остальные члены ряда).

Отсюда видно, что для достаточно малых φ можно пренебречь в (2) всеми членами ряда, кроме первого.

Поэтому в случае малых колебаний можно положить синус φ равным самому углу φ (в радианах):

$$\sin\varphi \approx \varphi.$$

Например, для φ = 0,10 *рад* (5,73°) sin φ = 0,0998,

0,1 ≈ 0,0988.

Для φ = 0,20 *рад* (11,46°) sin φ = 0,1987

0,2 ≈ 0,1987.

Но уже для φ = 1,0 *рад* (57,3°) sin φ = 0,841

1,0 ≠ 0,841.

Какие же углы соответствуют «малым» отклонениям? Это зависит от точности измерений. Если считать до двух знаков после запятой, то угол φ не должен превышать примерно 15°.

В связи с изложенным, уравнение динамики приобретает вид

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l}\right)\varphi = 0.$$

Так как коэффициент $\frac{g}{l}$ положителен, его можно обозначить как квадрат некоторой величины

$$\omega^2 = \frac{g}{l}. \qquad (3)$$

В итоге получаем уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \qquad (4)$$

Это уравнение называется дифференциальным, т. к. в него входит кроме неизвестной величины φ и ее производная (вторая). Общий метод решения таких уравнений рассматривается в курсе высшей математики. Решение (4) имеет вид

$$\varphi = a\cos(\omega t + \alpha_0). \qquad (5)$$

Можно непосредственной подстановкой в дифференциальное уравнение убедиться в том, что решение удовлетворяет ему, т.е. обращает его в тождество.

Следовательно, при малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется со временем по гармоническому закону.

При этом *a* – абсолютное значение наибольшего углового смещения – называется амплитудой, ω – циклической частотой колебаний, $(\omega t + \alpha_0)$ – фазой колебаний, которая определяет значение смещения в момент времени *t*, α_0 – начальной фазой.

Физический смысл циклической частоты ω связан с понятием периода *T* колебаний. Периодом называют длительность одного полного колебания, т.е. наименьший промежуток времени, через который повторяется произвольно выбранное состояние колебательной системы. За один период фаза колебаний получает прирост 2π

$$\omega(t + T) + \alpha_0 = \omega t + \alpha_0 + 2\pi,$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (6)$$

Тогда с учетом (3) получим формулу периода колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (7)$$

Из формулы периода колебаний вытекают такие закономерности колебаний математического маятника:

1) период колебаний маятника не зависит от амплитуды колебаний (для малых значений угла отклонения);

2) период колебаний маятника не зависит от массы маятника;

3) период колебаний маятника прямо пропорционален квадратному корню из длины маятника и обратно пропорционален квадратному корню из ускорения свободного падения.

Математический маятник используют для измерения ускорения свободного падения. Из формулы (7) следует

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l. \quad (8)$$

С перемещением от полюса к экватору Земли ускорение свободного падения вследствие вращения Земли уменьшается от значений g = 9,83 м/с^2 на полюсе до значений g = 9,78 м/с^2 на экваторе. Эти изменения лучше всего обнаруживаются с помощью математического маятника.

Кроме того, земная кора в разных местах имеет неодинаковый состав, поэтому в местах, где кора имеет большую плотность, ускорение свободного падения увеличивается. По изменению g на определенной площади, измеряя его математическим маятником, геологи судят об изменениях плотности поверхности земной коры и на основании этих данных выводят заключение о наличии полезных ископаемых. Это и есть так называемая гравитационная разведка полезных ископаемых, применяемая в геофизике.

Измерения

Работа состоит из двух частей.

1. **Установление *изохронности* колебаний**, т.е. независимости периода колебаний от амплитуды.

Угол отклонения при этом, согласно теории, должен быть невелик. В таблице приведены различные значения отклонений, соответствующие им углы в градусах и радианах, и синусы этих малых углов

x	*Угол* φ, *градусы*	$\sin\varphi$	*Угол* φ, *радианы*
20 см	5, 73	0,10	0,10
30 см	8,63	0,15	0,15
40 см	11,54	0,20	0,20

Как видно из таблицы, требование равенства синуса угла φ самому углу φ, выраженному в радианах, при этих отклонениях выполняются (с точностью до двух знаков) хорошо, следовательно, углы можно считать малыми при данной длине нити $l = 2{,}95$ м.

Пользуясь секундомером, определяют период колебаний маятника для различных начальных отклонений маятника от положения равновесия. Опыт выполняют по очереди для $x =$ 20, 30 и 40 см. Каждый раз определяют суммарное время большого числа колебаний (30 – 50 полных, т.е. туда и обратно колебаний) и вычисляют период колебаний маятника. Период определяется по три раза для каждого начального значения отклонения.

Данные опыта заносят в таблицу. Убеждаются в том, что период колебаний не зависит от амплитуды колебаний (начального отклонения маятника).

2. **Вычисление** ***ускорения свободного падения*** g.

По данным измерений периодов, занесенным в таблицу, по формуле **(8)** определяют ускорение свободного падения для данной местности.

Затем, пользуясь приближенной формулой зависимости ускорения свободного падения от географической широты $\varphi_ш$ местности

$$g = 9{,}78049\,(1 + 0{,}0052884\,\sin^2\varphi_ш - 0{,}0000059\,\sin^2 2\varphi_ш) - 0{,}00011,$$

рассчитывают теоретическое значение g для широты Днепропетровска ($\varphi_ш = 48°27'$ северной широты) и сравнивают со значением, полученным на опыте.

Контрольные вопросы

1. Подставьте решение (5) в уравнение (4) и убедитесь в том, что это выражение обращает его в тождество. При каком условии это возможно?
2. Перечислите свойства гармонического колебания маятника.
3. При каких углах колебания маятника можно считать гармоническими и почему?

x, *см*	*l*, *м*	T_i	$\langle T\rangle$	ΔT_i	$S_{\langle T\rangle}$	ΔT	*E*,%	g_i	$\langle g\rangle$	Δg_i	$S_{\langle g\rangle}$	Δg	*E*,%

$$g = \langle g\rangle \pm \Delta g$$